

Apellido paterno:	Apellido materno:	Nombre:

Pregunta 1	Pregunta 2	Pregunta 3	Total	Nota

Instrucciones:

- **NO HAY CONSULTAS.** Las respuestas sin desarrollo o sin justificación, no dan puntaje.
- Queda prohibido el uso de calculadoras programables, formulario y **celulares**.
- La prueba dura 90 minutos.

1) Calcule los siguientes límites:

a) [6 pts] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+2))!}{(2n)!(n^2+2)^2}$

b) [6 pts] $\lim_{n \rightarrow \infty} n - ne^{1/n}$

c) [6 pts] $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{3(n+1)}}{n^{3n}}$

2) Estudie la convergencia de las siguientes series numéricas. Justifique adecuadamente en cada caso:

a) [10 pts] $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$

b) [10 pts] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{6n^2+7n+2}$

c) [10 pts] $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{\pi^n}$

3) Sea $f(x) = e^{-x^2/2} - \cos(x)$.

a) [8 pts] Determine la serie de potencias asociada a $f(x)$, en torno al punto $x = 0$. (**Sugerencia:** Podría comenzar desde las series conocidas para e^x y $\cos(x)$).

b) [4 pts] Determine el valor de k de modo que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos(x)}{x^k} \neq 0$$

SOLUCIÓN

1) a) Tenemos que

$$\frac{(2(n+2))!}{(2n)!(n^2+2)^2} = \frac{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)}{(n^2+2)^2} \sim \frac{16n^4}{n^4},$$

por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2(n+2))!}{(2n)!(n^2+2)^2} = 16$

b) Aquí, tenemos $n - ne^{1/n} = \frac{1 - e^{1/n}}{1/n}$. Usando la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{1/n}}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-e^{1/n}(-1/n^2)}{-(1/n^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{1/n} = 1$$

c) Tenemos $\frac{(n+1)^{3n+3}}{n^{3n}} = \frac{(n+1)^{3n}}{n^{3n}}(n+1)^3 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} (n+1)^3$. El primer término tiende a e^3 , pero el segundo es divergente, por lo tanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{3(n+1)}}{n^{3n}} = +\infty$$

2) a) La función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ es decreciente para $x > e$. En efecto, $f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2} < 0 \iff 1 - \ln(x) < 0 \iff 1 < \ln(x)$. Además,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x} \underbrace{=}_{\text{L'H}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

En consecuencia, la serie converge por el Criterio de las Series Alternadas.

b) Notemos que

$$\frac{n+5}{6n^2+7n+2} > \frac{n}{6n^2+7n^2+2n^2} = \frac{n}{15n^2} = \frac{1}{15n}$$

Por otra parte, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{15n}$ es divergente (serie-p, con $p = 1$), por lo tanto, por el Criterio de Comparación, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{6n^2+7n+2}$$

es divergente.

c) Por el Criterio de la Raíz,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^4}{\pi^n}} = \frac{1}{\pi} < 1$$

por lo tanto, la serie es convergente.

3) a)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$e^{-x^2/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-x^2}{2} \right)^n \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

Por lo tanto,

$$e^{-x^2/2} - \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left(\frac{1}{2^n n!} - \frac{1}{(2n)!} \right)$$

4) Aprovechando la expansión anterior, tenemos que

$$\frac{e^{-x^2/2} - \cos(x)}{x^k} = \frac{1}{12}x^{4-k} - \frac{7}{360}x^{6-k} + \frac{13}{5040}x^{8-k} + \dots$$

Por lo cual, para que el límite sea distinto de cero, necesitamos que $4 - k = 0$, o equivalentemente, $k = 4$.